Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 4 de 2005

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = (5x + 8) / (x^2 + x + 1)$.
(a) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.
(b) [0'5 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de f .
(c) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
(d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

$f(x) = (5x + 8) / (x^2 + x + 1)$

(a) Corte con los ejes

Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0, 8)
Para f(x) = 0, tenemos 5x + 8 = 0, de donde x = -8/5. Punto (-8/5, 0)

(b) Asíntotas

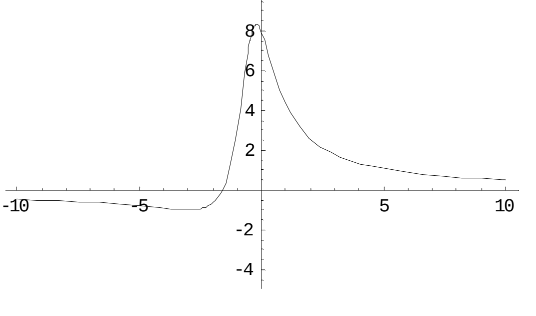
Resolvemos el denominador igualado a cero
$x^2 + x + 1 = 0$, y vemos que no tiene ninguna solución real, por tanto la función no tiene asíntotas verticales (A.V.)

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x+8}{x^2+x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x} = 0$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) de la gráfica de f tanto en + ∞ como en - ∞.
Veamos su posición relativa.
Como $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - asintota) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.H. en + ∞.
Como $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - asintota) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. en - ∞.
(c) Monotonía. Estudio de f '(x)
$f(x) = (5x + 8) / (x^2 + x + 1)$
$f'(x) = [5(x^2 + x + 1) - (5x + 8)(2x + 1)] / (x^2 + x + 1)^2 = (-5x^2 - 16x - 3) / (x^2 + x + 1)^2$
Los posibles máximos o mínimos relativos son las soluciones de f '(x) = 0
f '(x) = 0, de donde $-5x^2 - 16x - 3 = 0$. Resolviéndolo se obtiene x = -1/5 y x = -3.

Como f '(-4) = -19/(+) < 0, f(x) es estrictamente decreciente en (-∞, -3)
Como f '(-2) = 9/(+) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (-3, -1/5)
Como f '(0) = -3/(+) < 0, f(x) es estrictamente decreciente en (-1/5, + ∞)

Por definición x = -3 es un mínimo relativo que vale f(-3) = - 1
Por definición x = -1/5 es un máximo relativo que vale f(-1/5) = 25/3
(d) Esbozo de la gráfica de f

Teniendo en cuenta los apartados anteriores la gráfica sería



Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 4 de 2005

Considera la función $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región acotada que esta limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida.

Solución

$f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(a)

La recta tangente en x = 3 es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

$f(x) = x^2 - 5x + 4$, de donde $f(3) = -2$

$f'(x) = 2x - 5$, de donde $f'(3) = 1$.

Luego la recta es $y - (-2) = 1(x - 3)$, es decir $y = x - 5$

(b)

Dibujamos la parábola y la recta tangente que nos ayudarán a calcular el área pedida

$f(x) = x^2 - 5x + 4$.

$f'(x) = 2x - 5$.

El vértice (mínimo) lo obtenemos de $f'(x) = = 0$, es decir $2x - 5 = 0$, de donde $x = 5/2$.

Vértice V(2'5, f(2'5)) = V(2'5, - 2'25)

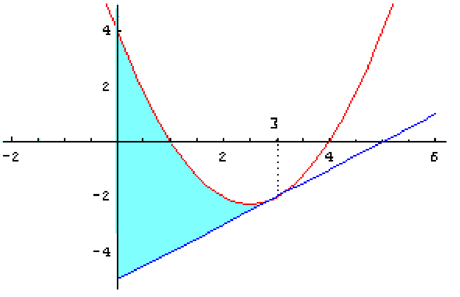
Cortes con los ejes

Para x = 0, punto (0, f(0)) = (0, 4)

Para f(x) = 0, tenemos $x^2 - 5x + 4 = 0$, de donde x = 1 y x = 4. Puntos (1, 0) y (4, 0)

Para la recta y = x – 5, tenemos los puntos (0, -5) y (5, 0)

Las gráficas conjuntas son



El área pedida es la señalada en color azul, que es

Área = $\int_0^3 [(parabola) - (\tan gente)]\,dx = \int_0^3 [(x^2 - 5x + 4) - (x - 5)]\,dx = = =$

$\int_0^3 [x^2 - 6x + 9]\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3$ = (9 – 27 +27) – (0) = 9 u^2

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 4 de 2005

Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Halla los valores de x para los que la matriz A − xI no tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Halla los valores de a y b para los que $A^2 + aA + bI = O$.

Solución

(a)

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A − xI no tiene inversa si y solo si det (A − xI) = | A − xI | ≠ 0

$A - xI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - x. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$

$| A - xI | = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2 - x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$

Resolviendo $x^2 - 4x + 3 = 0$, obtenemos $x = 1$ y $x = 3$, por tanto la matriz $A - xI$ no tiene inversa si $x = 1$ y $x = 3$.

(b)

$A^2 + aA + bI = O$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

$a,A = a. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1a \\ 1a & 2a \end{pmatrix}$;

$b.I = b. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$A^2 + aA + bI = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 1a \\ 1a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2a+b & 4+a \\ 4+a & 5+2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro tenemos:

$4 + a = 0$, de donde $a = - 4$

$5 + 2a + b = 0$, de donde $b = -5 + 8 = 3$

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 4 de 2005

[2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Solución

Distancia entre $r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Tomamos un punto y un vector de cada recta

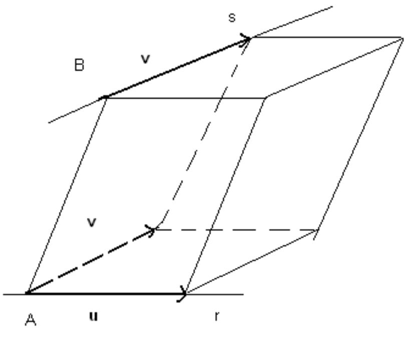
De la recta r punto el A(6, 1, 5) y vector **u** = (1, -2, -7)

De la recta r punto el B y vector **v**

El punto B se obtiene resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$, que sale x = y = 1, y tomando z = 0. Punto B(1,1, 0)

El vector **v** es paralelo al producto vectorial de los vectores normales que determinan cada plano de la recta s, es decir $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(0) – **j**(0) + **k**(7) = (0, 0, 7). Tomamos como vector director otro mas sencillo (paralelo, proporcional) que sería el **v** = (0, 0, 1)

Hay varias formas de calcular la distancia entre dos rectas. Vamos a utilizar la del volumen del paralelepípedo.



Volumen paralelepípedo = |{ **AB**, **u**, **v**}| = (Área de la base).(altura) = ||**u**x**v**||.d(r, s), de donde
d(r, s) = (|{ **AB**, **u**, **v**}|) / (||**u**x**v**||)
AB = (-5, 0, -5); **u** = (1, -2, -7) y **v** = (0, 0, 1)

{ **AB**, **u**, **v**} = $\begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1(10) = 10

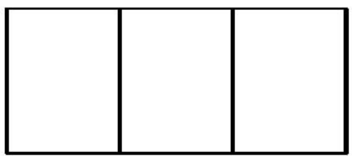
ux**v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(-2) – **j**(1) + **k**(0) = (-2, -1, 0).; ||**u**x**v**|| = $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

Luego d(r, s) = (|{ **AB**, **u**, **v**}|) / (||**u**x**v**||) = 10 / $\sqrt{5}$ = 2. $\sqrt{5}$ u.l.

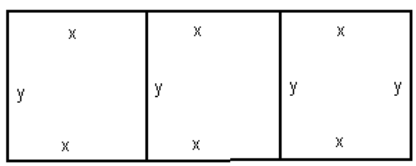
Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 4 de 2005

[2’5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución



Área = 3x . y = 12800, de donde y = 12800/3x
Longitud L = 6x + 4y
Minimizamos la función L = 6x + 4y = 6x + 4(12800/3x) = 6x + 51200/3x
L(x) = 6x + 51200/3x
L ‘(x) = 6 + (51200/3)(-1/x^2)

Resolvemos la ecuación L ‘(x) = 0, de donde 51200/3)(1/x^2) = 6, por tanto x^2 = 25600/9 y las soluciones son x = ± 160/3.
Como las soluciones son distancias han de ser positivas luego x = 160/3. Veamos que efectivamente es un mínimo con la segunda derivada.
L ‘(x) = 6 + (51200/3)(-1/x^2)
L “(x) = (51200/3)(-1(-2x/x^4)) = (102400/3)(1/x^3)
L “(160/3) = (102400/3)(1/$(160/3)^3$) > 0, luego x = 160/3 es un mínimo.
Las dimensiones pedidas son 3x = 160 m. de largo e y = 12800/160 = 80 m. de ancho.

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 4 de 2005

Calcula las siguientes integrales:
(a) [0’5 puntos] ∫ cos (5x + 1) dx.
(b) [0’5 puntos] $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} dx$
(c) [1’5 puntos] $\int_0^1 xe^{-3x} dx$

Solución

(a) ∫ cos (5x + 1) dx = [sen(5x + 1)] / 5 + K

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}dx = \int \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \int (x+2)^{-3/2}dx = \frac{(x+2)^{-3/2+1}}{-3/2+1} + K = \frac{-3}{\sqrt[3]{x+2}} + K$

(c) $\int_0^1 xe^{-3x}dx$

I = $\int_0^1 xe^{-3x}dx$

I_1 = $\int\ xe^{-3x}dx$ es una integral por partes

(Aplicamos $\int udv = uv - \int vdu$)

Tomamos u = x y dv = e^{-3x} dx, con lo cual du = dx y v = $\int\ e^{-3x}dx$ = $(e^{-3x})/(-3)$

I_1 = $\int\ xe^{-3x}dx$ = x.[$(e^{-3x})/(-3)$] + (1/3). $\int\ e^{-3x}dx$ = $(-x.e^{-3x})$ /3 - (e^{-3x}) /9 . Luego

I = $\int_0^1 xe^{-3x}dx = \left[\frac{-x.e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9}\right]_0^1$ = ($-e^{-3}/3 - e^{-3}/9$) – (0 – 1/9) = $(-4/9).e^{-3}$ + 1/9

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 4 de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + y + (m + 4)z &= my \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

(a) [1 punto] Determina los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.
(b) [1’5 puntos] Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que z = 19.

Solución

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + y + (m + 4)z &= my \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

Si observamos es un sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + (1 - m)y + (m + 4)z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

(a)
Los sistemas homogéneos de tres ecuaciones con tres incógnitas tienen solución única (0, 0, 0) si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

|A| = $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1-m & m+4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ = 5[(1-m)+3m+12] – 2(1-2m-8) +(-1)(-3-2+2m) = 12m + 84

Resolviendo 12m + 84 = 0 tenemos m = -7, por tanto para m ≠ -7 el sistema tiene solución única.
(b)
Si |A| = 0, como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ = -15 – 4 = -19 ≠ 0 tenemos que rango(A) = 2, el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Tomo la 1ª y la 3ª (son las que he utilizado para el determinante de orden 2)
5x + 2y − z = 0
2x − 3y + z = 0; Haciendo z = t $\in \Re$, y resolviendo el sistema

5x + 2y = t
2x − 3y = - t; obtenemos x = t/19 e y = 7t/19 , por tanto la solución del sistema es
(x, y, z) = (t/19 , 7t/19, t) con z = t $\in \Re$.

Nos piden una solución con z = 19, luego t = 19 y la solución es (x,y,z) = (1, 7, 19).

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 4 de 2005

Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los vértices de un triángulo.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación del plano π que contiene al triangulo.

(b) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

(c) [1 punto] Calcula el área del triángulo ABC .

Solución

A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) vértices de un triángulo.

(a)

Para un plano necesitamos un punto y dos vectores independientes, en nuestro caso para el plano que contiene al triángulo de vértices ABC tomamos como punto el A y como vectores el **AB** y el **AC**.

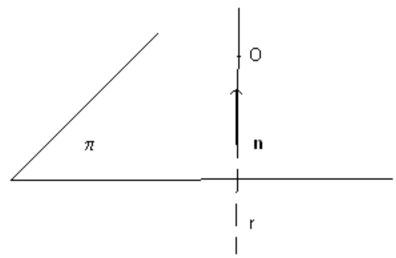
A(−3, 4, 0)

AB = (6, 2, 3)

AC = (2, -2, 1)

El plano pedido es $\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (x+3)(8) - (y-4)(0) + z(-16) = 8x - 16z + 24 = 0$

(b)



La recta perpendicular al plano π que pasa por el origen O(0, 0, 0) tiene como vector director **v** el vector normal del plano **n** = (8, 0, -16).

La recta pedida es $r \equiv \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \\ z = -16t \end{cases}$ con $t \in \Re$.

(c)

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determina, que sabemos es el módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**, es decir

Área = (1/2) ||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{8^2+16^2} = \frac{1}{2}\sqrt{320}\ u^2$

AB = (6, 2, 3)

AC = (2, -2, 1)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(8) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(-16) = (8, 0, -16)$